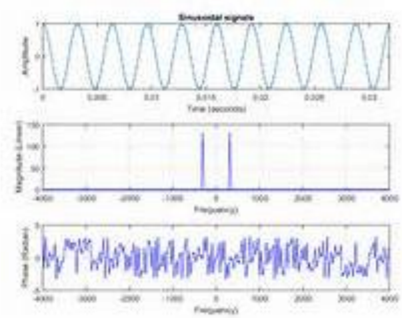
$$y_{p+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jp} x_{j+1}$$

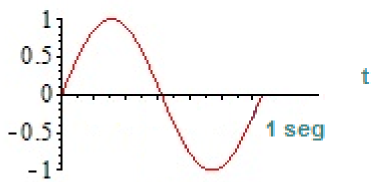


Transformada Discreta de Fourier

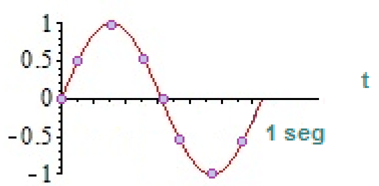
Dos Ejemplos paso por paso

José Mujica

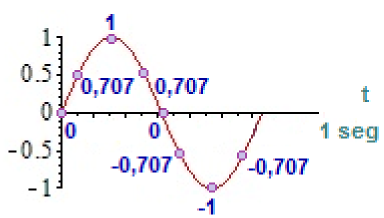
Problema 1.-Tomamos una onda simple de 1 Hertz (Hz) con una amplitud de 1.



Escogemos una frecuencia de Sampléo (muestras) de 8 Hz (Número de muestras N=8).



Los valores para esos puntos particulares escogidos por simetría son



Prologo

Esta Guía no pretende la enseñanza de la Transformada de Fourier. Solo cubre dos ejercicios completos, paso por paso, de la obtención de Frecuencias a partir de una onda compleja.

La finalidad es que un Técnico con formación básica pueda, con el uso de una calculadora científica, reconstruir la experiencia de Fourier. Su razón de ser es que el autor no encontró, a lo largo de muchos años de búsqueda, ejercicios completos sobre el tema sino siempre de manera indicada.

La mayoría de los textos de Ingeniería consultados, documentos de Internet y videos de Youtube, (Incluyendo los de grandes universidades como la Stanford), prescindían del desarrollo paso a paso. De manera que un Técnico cuyo interés principal simplemente fuese recrear la experiencia y no estudiar Fourier a fondo, no podía hacerlo.

Con todo y lo expuesto no hemos dejado de explicar detalladamente algunos conceptos de manera resumida, como en el caso de los números Complejos. Esperamos con esto haber contribuido una vez más a la mejora de la Profesión del Audio.

$X_0=0$

$X_1=0{,}707$

$X_2=1$

$X_3=0{,}707$

$X_4=0$

$X_5=-0{,}707$

$X_6=-1$

$X_7=-0{,}707$

Paso 1. (Cálculo Opcional.) ¿Cómo se obtienen estos valores?

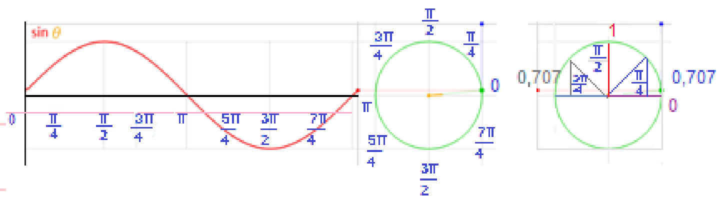
Evaluando la Función Sen(x) Simétricamente, por ejemplo

$$Sen(0) = 0$$

$$Sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$$

$$Sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$Sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0{,}707$$



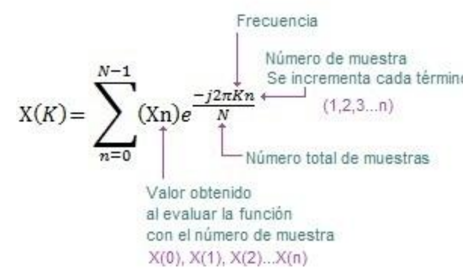
Paso 2.-A partir de estos valores de la Función, procedemos a aplicar la Transformada Discreta de Fourier para obtener los 8 valores Discretos para las Frecuencias.

$$X(n) = \sum_{n=0}^{N-1} (Xn)e^{\frac{-j2\pi Kn}{N}}$$

Si quiere Obtener los valores en la calculadora , escriba en Modo (Deg*):

$$Sen\left(\frac{180}{4}\right)$$

*Si no sabe colocar la calculadora en Modo (Deg), lo explicamos en las siguientes secciones.



Valor Discreto X_0

$$\mathbf{X_0} = (0)e^{\frac{-j2\pi(0)(0)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(0)(1)}{8}} + (1)e^{\frac{-j2\pi(0)(2)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(0)(3)}{8}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(0)(4)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(0)(5)}{8}} + (-1)e^{\frac{-j2\pi(0)(6)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(0)(7)}{8}}$$

La Fórmula de Euler

e^{jx} = Cos(x)+jSin(x)

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$\mathbf{X_0} = 0 + 0{,}707[\cos(0) + j\sin(0)] + 1[\cos(0) + j\sin(0)] + 0{,}707[\cos(0) + j\sin(0)] + 0[\cos(0) + j\sin(0)] - 0{,}707[\cos(0) + j\sin(0)] - 1\,[\cos(0) + j\sin(0)] - 0{,}707[\cos(0) + j\sin(0)]$$

$$X_{0=0+0{,}707[1+j0]+1[1+j0]+0{,}707[1+j0]+0[1+j0]-0{,}707[1+j0]-1[1+j0]-0{,}707[1+j0]}$$

$$X_{0=0+0{,}707+1+0{,}707+0-0{,}707-1-0{,}707}$$

X_0=0

Leonhard Euler

¿Qué son los números complejos e imaginarios?

La definición actual dice que es un número complejo cuya parte Real es cero (0), es decir (X,iY) es (0, iY). Su unidad es √-1, por lo que se dice también que son números cuya potenciación es negativa, si elevamos √-1 al cuadrado, tendremos $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

Descártes empleó el término para referirse a ellos de forma despectiva en el siglo XVII, pero solo refiriéndose a la parte imaginaria. Euler también lo haría en el siglo XVIII pero como número complejo, Parte Real e Imaginaria, para referirse a un número que no existe.

Aplicaciones. Se emplean en Electricidad para explicar las fases de la corriente alterna y resaltar que hay ese componente (Fasor), que existe, es tangible y peligroso si no se maneja con cuidado.

¿Por qué se usa "j" y no "i"?

En electricidad, para que no se confunda con el término "i" de Intensidad de la corriente eléctrica.

Valor Discreto X_1

$$X_{1}=(0)e^{\frac{-j2\pi(1)(0)}{8}}+(0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(1)(1)}{8}}+(1)e^{\frac{-j2\pi(1)(2)}{8}}+(0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(1)(3)}{8}}+(0)e^{\frac{-j2\pi(1)(4)}{8}}+(-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(1)(5)}{8}}+(-1)e^{\frac{-j2\pi(1)(6)}{8}}+(-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(1)(7)}{8}}$$

La Fórmula de Euler

e^{jx} = Cos(x)+jSin(x)

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

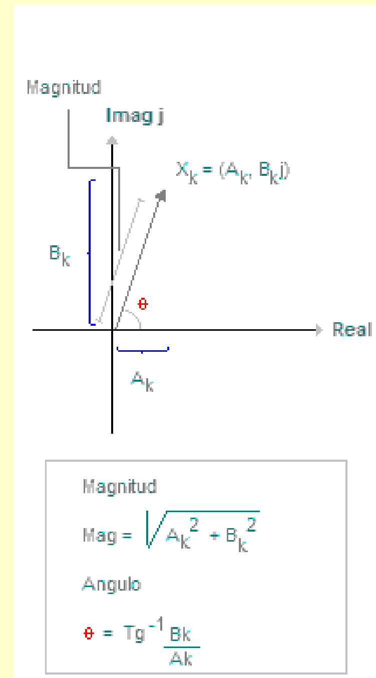
$$\begin{aligned}X_1 &= 0+0{,}707\left[\cos\left(\frac{-1\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{-1\pi}{4}\right)\right]+1\left[\cos\left(\frac{-1\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{-1\pi}{2}\right)\right]\\ &+0{,}707\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]+0[\cos(-\pi)+j\sin(-\pi)]\\ &-0{,}707\left[\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right)\right]\\ &-1\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right]-0{,}707\left[\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

X_{1}=0+(0,5-0,5j)+(-j)+(-0,5-0,5j)+0+-(0,5-0,5j)+(-j)+(-0,5-0,5j)

X1=-4j

Graficando un número complejo. Como podemos ver en la siguiente gráfica, en el eje horizontal se representan el valor real del número y en la vertical el número imaginario.

La magnitud del vector se puede obtener por Pitágoras y su ángulo por medio de la función Arcotangente.



Valor Discreto X_2

$$X_2 = (0)e^{\frac{-j2\pi(2)(0)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(2)(1)}{8}} + (1)e^{\frac{-j2\pi(2)(2)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(2)(3)}{8}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(2)(4)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(2)(5)}{8}} + (-1)e^{\frac{-j2\pi(2)(6)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(2)(7)}{8}}$$

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$\begin{aligned} X_2 &= 0 + 0{,}707\left[\cos\left(\frac{-1\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{-1\pi}{2}\right)\right] + 1[\cos(-\pi) + j\sin(-\pi)] \\ &+ 0{,}707\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right] + 0[\cos(-2\pi) + j\sin(-2\pi)] \\ &- 0{,}707\left[\cos\left(\frac{-5\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{-5\pi}{2}\right)\right] \\ &- 1\,[\cos(-3\pi) + j\sin(-3\pi)] - 0{,}707\left[\cos\left(\frac{-7\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{-7\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$X_{2=0+(0-0{,}707j)+(-1+0j)+(0+0{,}707j)+0+(0+0{,}707j)+(1+0j)+(0-0{,}707j)}$$

X_2=0

Instrucciones para una calculadora Casio FX-95MS

Si se quiere calcular Sen $(-\frac{3\pi}{2})$

Oprima la Tecla Mode hasta que aparezca
Deg Rad Gra
1 2 3
OPrima 1

Escriba
Sin (- 3 x 180 ÷ 2)
El resultado será
1

Valor Discreto X_3

$$X_3 = (0)e^{\frac{-j2\pi(3)(0)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(3)(1)}{8}} + (1)e^{\frac{-j2\pi(3)(2)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(3)(3)}{8}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(3)(4)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(3)(5)}{8}} + (-1)e^{\frac{-j2\pi(3)(6)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(3)(7)}{8}}$$

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$X_3 = 0 + 0{,}707[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)] + 1[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)] + 0{,}707[\cos\left(\frac{-9\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{-9\pi}{4}\right)] + 0[\cos(-3\pi) + j\sin(-3\pi)] - 0{,}707[\cos\left(\frac{-15\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{-15\pi}{4}\right)] - 1\,[\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)] - 0{,}707[\cos\left(\frac{-21\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{-21\pi}{4}\right)]$$

$$X_{3=0+(-0,5-0,5j)+(0+j)+(0,5-0,5j)+0+(-0,5-0,5j)+(-0+j)+(0,5-0,5j)}$$

X_3=0

CÓMO SE APLICA EULER

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} (Xn)e^{\frac{-j2\pi Kn}{N}}$$

Para simplificar hacemos que toda esta expresión sea bn

bn

e^{jbn}= Cos(bn)+jSin(bn)

(Xn) Cos(bn)+jSin(bn)

De manera que en este caso tendríamos para algunos de nuestros ejemplos

$0{,}707\, e^{\frac{-j2\pi(1)(3)}{8}}$

Aplicando Euler

$0{,}707[\mathrm{Cos}(\_\frac{3\pi}{4})+j\mathrm{Sin}(\_\frac{3\pi}{4})]$

Valor Discreto X_4

$$X_4 = (0)e^{\frac{-j2\pi(4)(0)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(4)(1)}{8}} + (1)e^{\frac{-j2\pi(4)(2)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(4)(3)}{8}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(4)(4)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(4)(5)}{8}} + (-1)e^{\frac{-j2\pi(4)(6)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(4)(7)}{8}}$$

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$\begin{aligned} X_4 = 0 &+ 0{,}707[\cos(-\pi) + j\sin(-\pi)] + 1[\cos(-2\pi) + j\sin(-2\pi)] \\ &+ 0{,}707[\cos(-3\pi) + j\sin(-3\pi)] + 0[\cos(-4\pi) + j\sin(-4\pi)] \\ &- 0{,}707[\cos(-5\pi) + j\sin(-5\pi)] \\ &- 1\,[\cos(-6\pi) + j\sin(-6\pi)] - 0{,}707[\cos(-7\pi) + j\sin(-7\pi)] \end{aligned}$$

$$X_{4=0+(-0,707-0j)+(1+0)+(-0,707-0j)+0+(0,707-0j)+(-1+0j)+(0,707-0j)}$$

X_4=0

Valor Discreto X_5

$$X_5 = (0)e^{\frac{-j2\pi(5)(0)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(5)(1)}{8}} + (1)e^{\frac{-j2\pi(5)(2)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(5)(3)}{8}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(5)(4)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(5)(5)}{8}} + (-1)e^{\frac{-j2\pi(5)(6)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(5)(7)}{8}}$$

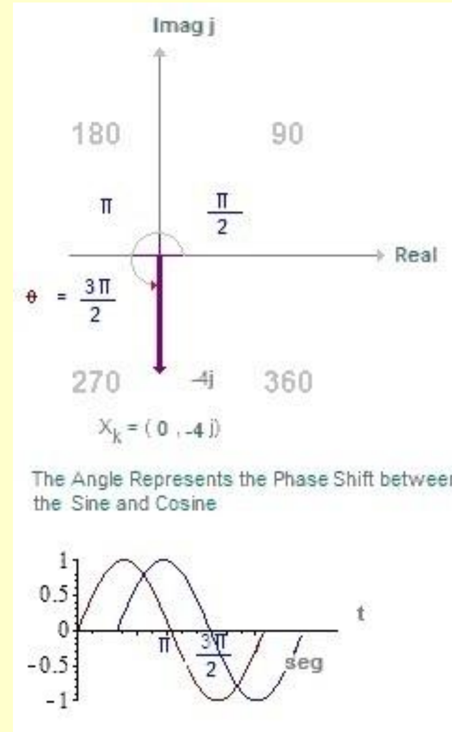
Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$\begin{aligned} X_5 = 0 &+ 0{,}707\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right] + 1\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right] \\ &+ 0{,}707\left[\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\right] + 0[\cos(-5\pi) + j\sin(-5\pi)] \\ &- 0{,}707\left[\cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right)\right] \\ &- 1\left[\cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{15\pi}{2}\right)\right] - 0{,}707\left[\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)\right] \end{aligned}$$

$$X_{5=0+(-0,5+0,5j)+(0-j)+(0,5+0,5j)+0+(-0,5+0,5j)+(0-j)+(0,5+0,5j)}$$

X_5=0

Interpretación Geométrica de la Gráfica de un Número Complejo de Valor -4j



Valor Discreto X_6

$$X_6 = (0)e^{\frac{-j2\pi(6)(0)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(6)(1)}{8}} + (1)e^{\frac{-j2\pi(6)(2)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(6)(3)}{8}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(6)(4)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(6)(5)}{8}} + (-1)e^{\frac{-j2\pi(6)(6)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(6)(7)}{8}}$$

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

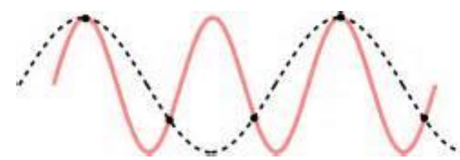
$$X_6 = 0 + 0{,}707[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)] + 1[\cos(-3\pi) + j\sin(-3\pi)] + 0{,}707[\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)] + 0[\cos(-6\pi) + j\sin(-6\pi)] - 0{,}707[\cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{15\pi}{2}\right)] - 1\,[\cos(-9\pi) + j\sin(-9\pi)] - 0{,}707[\cos\left(-\frac{21\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{21\pi}{2}\right)]$$

$$X_{6=0+(-0,5+0,5j)+(0-j)+(0,5+0,5j)+0+(-0,5+0,5j)+(0-j)+(0,5+0,5j)}$$

X_6=0

Teorema de Nyquist

Una señal analógica puede ser reconstruída, sin error, de muestras tomadas en iguales intervalos de tiempo. La razón de muestreo debe ser igual, o mayor, al doble de su ancho de banda de la señal analógica".



La teoría del muestreo define que para una señal de ancho de banda limitado, la frecuencia de muestreo, fm, debe ser mayor que dos veces su ancho de banda [B] medida en Hertz [Hz].

fm ≥ 2·B

Supongamos que la señal a ser digitalizada es la voz...el ancho de banda de la voz es de 4,000 Hz aproximandamente. Entonces, su razón de muestreo sera 2*B= 2*(4,000 Hz), es igual a 8000 Hz, equivalente a 8,000 muestras por segundo (1/8000). Entonces la razón de muestreo de la voz debe ser de al menos 8000 Hz, para que pueda regenerarse sin error.

Valor Discreto X_7

$$X_7 = (0)e^{\frac{-j2\pi(7)(0)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(7)(1)}{8}} + (1)e^{\frac{-j2\pi(7)(2)}{8}} + (0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(7)(3)}{8}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(7)(4)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(7)(5)}{8}} + (-1)e^{\frac{-j2\pi(7)(6)}{8}} + (-0{,}707)e^{\frac{-j2\pi(7)(7)}{8}}$$

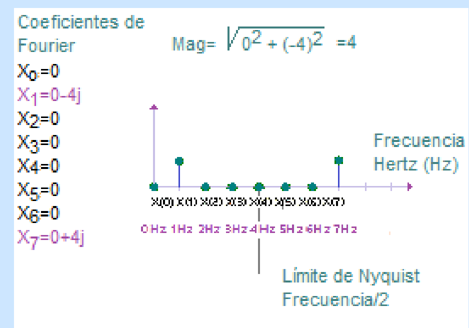
Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$X_7 = 0 + 0{,}707[\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)] + 1[\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)] + 0{,}707[\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)] + 0[\cos(-7\pi) + j\sin(-7\pi)] - 0{,}707[\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)] - 1\,[\cos\left(-\frac{21\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{21\pi}{2}\right)] - 0{,}707[\cos\left(-\frac{49\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{49\pi}{4}\right)]$$

$$X_{7=0+(0,5+0,5j)+(0+j)+(-0,5+0,5j)+0+(0,5+0,5j)+(0+j)+(-0,5+0,5j)}$$

X_7=4j

Graficando el Resultado de los valores discretos Obtendremos la siguiente Gráfica. Donde vemos valores de 4 para 1Hz y 7Hz. El valor de 7Hz corresponde al Octavo valor Discreto y si se aplica el Teorema de Nyquist de doblar la Frecuencia de 4Hz, obtendremos una magnitud de 8 en 1Hz, que al ser dividida entre el número de valores Discretoos (8) Nos daría Fr= 8/8 = 1Hz que es lo que sabíamos que debíamos obtener.



Problema 2

Consideremos la Función cualquiera en el Dominio del Tiempo:

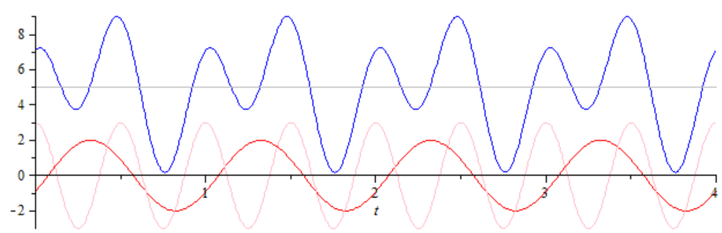
$$F(t) = 5 + 2 * Cos(2\pi * t - 90) + 3 * Cos(4 * \pi * t)$$

DC 1HZ 2Hz

Procedemos a graficarla (plot). Opcional con el Software MAPLE 14. Para esto emplearemos la función de graficación múltiple que nos permite visualizar tanto la curva total de la suma (Color azul), como sus componentes . En este caso sus componentes son una señal de Corriente Directa (DC/Color gris) de valor 5, una onda de 1 Hz (Color Rojo) y una onda de 2Hz (Color Rosado).

La instrucción para graficación múltiple consiste en separar con comas las diferentes gráficas que deseemos. Se decidió tomar una muestra (Sample) de 4Hz.

$$plot([(5 + (2\cdot\cos((2\cdot\pi\cdot t) - 90)) + 3\cdot\cos(4\cdot\pi\cdot t)), 2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot t - 90), 3\cdot\cos(4\cdot\pi\cdot t), 5], t = 0..4, color = [blue, red, pink, grey], style = [line, line, line])$$



Paso 1. Evaluamos la Función en las 4 muestras

Vamos a muestrear la curva 4 veces por segundo (4Hz), con esto haremos que t=K/4 y sustituyendo este valor en la ecuación inicial tendremos.

$$F(k) = 5 + 2 * Cos\left(\frac{\pi 2K}{4} - 90\right) + 3Cos(\pi K)$$

$$F(k) = 5 + 2 * Cos\left(\frac{\pi K}{2} - 90\right) + 3Cos(\pi K)$$

Las Muestras (M_n, 0,1,2,3) discretas serían

M1 $F(0) = 5 + 2 * Cos\left(\frac{0\pi}{2} - 90\right) + 3Cos(0\pi)$

$$F(0) = 5 + 2 * Cos(-90) + 3Cos(0)$$

$$F(0) = 5 + 0 + 3(1)$$

F(0) = 8

M2 $F(1) = 5 + 2 * Cos\left(\frac{1\pi}{2} - 90\right) + 3Cos(1\pi)$

F(1) =4

M2 $F(2) = 5 + 2 * Cos\left(\frac{2\pi}{2} - 90\right) + 3Cos(2\pi)$

F(2)=8

M3 $F(3) = 5 + 2 * Cos\left(\frac{3\pi}{2} - 90\right) + 3Cos(3\pi)$

F(3)=0

Paso 2. Aplicaremos la Transformad Discreta de Fourier para los 4 valores Discretos (X_0, X_1, X_2, X_3)

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathrm{Xn}) e^{\frac{-j2\pi Kn}{N}}$$

F_0=8
F_1=4
F_2= 8
F_3=0

Valor Discreto X_0

$$X_0 = (8)e^{\frac{-j2\pi(0)(0)}{4}} + (4)e^{\frac{-j2\pi(0)(1)}{4}} + (8)e^{\frac{-j2\pi(0)(2)}{4}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(0)(3)}{4}}$$

La Fórmula de Euler

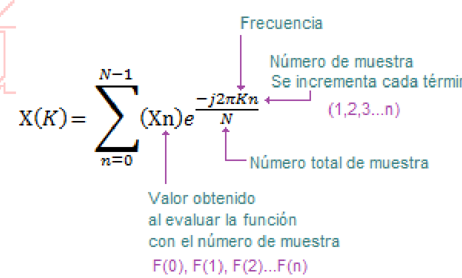
e^{jx} = Cos(x)+jSin(x)

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$X_0 = 8[\cos(0) + j\sin(0)] + 4[\cos(0) + j\sin(0)] + 8[\cos(0) + j\sin(0)] + 0[\cos(0) + j\sin(0)]$$

$$X_0 = 8[1 + 0j \quad] + 4[1 + 0j \quad] + 8[1 + 0j \quad] + 0[1 + 0j \quad]$$

$$X_{0=8+4+8=20}$$



Valor Discreto X_1

$$\mathbf{X_1} = (8)e^{\frac{-j2\pi(1)(0)}{4}} + (4)e^{\frac{-j2\pi(1)(1)}{4}} + (8)e^{\frac{-j2\pi(1)(2)}{4}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(1)(3)}{4}}$$

La Fórmula de Euler

e^{jx} = Cos(x)+jSin(x)

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$\mathbf{X_1} = 8[\cos(0) + j\sin(0)] + 4[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)] + 8[\cos(-\pi) + j\sin(-\pi)] + 0[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)]$$

$$\mathbf{X_1} = 8[1 + 0j \quad] + 4[0 + (-j) \quad] + 8[-1 + 0j \quad] + 0$$

$$X_{1=8+(-4j)-8=-4j}$$

Instrucciones para una calculadora Casio FX-95MS

Si se quiere calcular Sen $(-\frac{3\pi}{2})$

Oprima la Tecla Mode hasta que aparezca
Deg Rad Gra
1 2 3
OPrima 1

Escriba
Sin (- 3 x 180 ÷ 2)
El resultado será
1

Valor Discreto X_2

$$X_2 = (8)e^{\frac{-j2\pi(2)(0)}{4}} + (4)e^{\frac{-j2\pi(2)(1)}{4}} + (8)e^{\frac{-j2\pi(2)(2)}{4}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(2)(3)}{4}}$$

La Fórmula de Euler

e^{jx} = Cos(x)+jSin(x)

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$X_2 = 8[\cos(0) + j\sin(0)] + 4[\cos(-\pi) + j\sin(-\pi)] + 8[\cos(-2\pi) + j\sin(-2\pi)] + 0[\cos(-3\pi) + j\sin(-3\pi)]$$

$$X_2 = 8[1 + 0j \quad] + 4[-1 + 0j \quad] + 8[1 + 0j \quad] + 0$$

$$X_{2=8-4+8=12}$$

CÓMO SE APLICA EULER

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} (Xn)e^{-j\frac{2\pi Kn}{N}}$$

Para simplificar hacemos que toda esta expresión sea bn

bn

e^{jbn}= Cos(bn)+jSin(bn)

(Xn) Cos(bn)+jSin(bn)

De manera que en este caso tendríamos para algunos de nuestros ejemplos

$8\,e^{\frac{-j2\pi(1)(3)}{4}}$

Aplicando Euler

8[Cos($-\frac{3\pi}{2}$)+jSin($-\frac{3\pi}{2}$)]

Valor Discreto X_3

$$\mathbf{X_3} = (8)e^{\frac{-j2\pi(3)(0)}{4}} + (4)e^{\frac{-j2\pi(3)(1)}{4}} + (8)e^{\frac{-j2\pi(3)(2)}{4}} + (0)e^{\frac{-j2\pi(3)(3)}{4}}$$

La Fórmula de Euler

e^{jx} = Cos(x)+jSin(x)

Aplicando la Fórmula de Euler Nos queda:

$$\mathbf{X_3} = 8[\cos(0) + j\sin(0)] + 4[\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)] + 8[\cos(-3\pi) + j\sin(-3\pi)] + 0[\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)]$$

$$\mathbf{X_3} = 8[1 + 0j \quad] + 4[0 + 1j \quad] + 8[-1 + 0j \quad] + 0[\cos(0) + j\sin(0)]$$

$$X_{3=8+4-8=4j}$$

Graficando los valores para el Dominio de la Frecuencia tendremos